Corrigé : 2019/2 : FONCTIONS 1

Exercice 1 :

1) D'après le tableau de variations, f est strictement décroissante sur $[-10\,;-1]$ donc $f(-5) > f(-4)$

2) La réponse b) est fausse : pour tout réel x$\in$ $[5;7]$, $f'(x) < 0$, il est possible que la dérivée s'annule en une valeur sans changer de signe, ce qui n'impacte pas la stricte monotonie (penser à la fonction cube en 0 !)
De plus, a) et c) sont clairement vrais.
3) La c) est impossible : La dérivée f' ne peut pas changer de signe sur l'intervalle [-10 ; -1] car f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Exercice 2 :

1) f est un polynome donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$.

$$f'(x) = 12x^2 + 2$$

Pour étudier les variations de f, on étudie le signe de f'. Or, $f'(x)$ est strictement positive sur $[0;1]$ donc f est strictement croissante sur $[0;1]$. De plus, f est continue sur $[0;1]$ (car dérivable).
On en déduit que $f([0\,;1]) = [f(0)\,;f(1)] = [-3\,;3]$
Or $0 \in [-3\,;3]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur $[0\,;1]$.
2) Cet algorithme permet de déterminer une valeur approchée par défaut de α à la précision 10^{-k}.
En effet, on cherche une valeur approchée par défaut de α à la précision 10^{-1} (tant que f ne change pas de signe), puis à la précision 10^{-2} en incrémentant n, …
3) Cet algorithme correspond à la méthode de balayage utilisée à la calculatrice en exploitant les tables de valeurs.

Exercice 3 :

1) Pour étudier les variations de f, on étudie le signe de f'.
Pour tout réel $x, f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$
Ainsi, f' s'annule en 2 et en -2. Comme 3$>$ 0, on en déduit le signe du trinôme, et les variations de f.
D'où f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[2\,;+\infty[$, et strictement décroissante sur $[-2\,;2]$.
2)a) D'après la calculatrice, $\alpha \approx -3{,}85$; $\beta = 1$; $\gamma \approx 2{,}85$.
b) A partir des variations et des valeurs d'annulation (faire le tableau pour expliquer), on en déduit que :
f négative sur $]-\infty\,;\alpha]$ et sur $[1\,;\gamma]$, f est positive sur $[\alpha\,;1]$ et sur $[\gamma;+\infty[$.
3) a) g est de la forme f^n avec $n = 5, f(x) = x^3 - 12x + 11$ et $f'(x) = 3x^2 - 12$
$Ainsi, g' = n \times f' \times f^4$ $soit$ $g'(x) = 5(3x^2 - 12)(x^3 - 12x + 11)^4$ pour tout x réel.
b) Comme 5$>$ 0 et $(x^3 - 12x + 11)^4 \geq 0$ puisque 4 est pair, les fonctions $f'(x)$ et $g'(x)$ les mêmes signes sur $\mathbb{R}$. Donc, les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}$.
De plus, 5 est impair et $g = f^5$, donc f et g ont les mêmes signes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Le point F appartient à Γ, courbe représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
On pose $a \in [0\,;1[$ l'abscisse de F. Ainsi F(a ; $\sqrt{1-a^2}$)
On détermine l'équation de la tangente (T) en F à Γ : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 1 - x^2$ et $u'(x) = -2x$
Ainsi, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1;1[$
(T) : $y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}(x-a) + \sqrt{1-a^2}$
Or A(0 ;2) appartient à (T) donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2 = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}(0-a) + \sqrt{1-a^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-a^2} = a^2 + \sqrt{1-a^2}^2 \text{ } en\ multipliant\ par\ \sqrt{1-a^2}$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-a^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - a^2 = \frac{1}{4}$ en mettant au carré $\Rightarrow a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ car a positif.
S'il y a une solution, ce serait F($\frac{\sqrt{3}}{2}$;$\frac{1}{2}$)

Ayant rédigé par implication, il est nécessaire de vérifier que $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est bien solution, ce qui est le cas !